Corso di

Analisi Matematica I

ingegneria, lettere: KAA-MAZ

docente: E. Callegari

Prova simulata n. **1**

A.A. 2008-2009
11 Ottobre 2008

1. Introduzione

Qui di seguito ho riportato testi, svolgimenti e parametri di valutazione della simulazione di prova scritta che ho fatto sostenere ai miei studenti Sabato 11 Ottobre. Si è trattato di una prova mista: la prima parte, il cui testo è contenuto nel paragrafo 2, era a risposta multipla, mentre la seconda parte, riportata nel paragrafo 3, era una classica prova scritta con svolgimento.
La prova si è tenuta con le seguenti modalità:

10.00 inizio dello svolgimento della parte a risposta multipla;

11.15-11.45 intervallo di tempo durante il quale ciascuno studente doveva effettuare il cambio di parte: ovvero consegnare le risposte della parte a risposta multipla e farsi dare il testo della parte con svolgimento;

13.00 termine ultimo per consegnare lo svolgimento della seconda parte.

Nei paragrafi successivi, oltre al testo ho riportato non solo gli svolgimenti, ma anche alcune osservazioni sul tipo di errori fatti per la parte a risposta multipla, e i criteri di valutazione utilizzati per la parte con svolgimento. Questo allo scopo di mettere in condizione di autovalutarsi tutti gli studenti che non hanno partecipato alla simulazione, ma che vorrebbero provare a cimentarsi da soli.
Conto di fare un'altra simulazione Sabato 25 Ottobre, strutturata in modo identico ma sui limiti di funzioni.

2. I parte: quesiti a risp. multipla

Quesito 1.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^{n+2}+2(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}}$ è uguale a:

A 5 B 0 C 3 D 2 E $\frac{3}{e}+2e$ F $+\infty$

Quesito 2.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+6n}-n}{\sqrt{n^4+3n^2}-n^2}$ è uguale a:

A 6 B 2 C $\frac{1}{3}$ D 0 E $+\infty$ F 1

Quesito 3.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+(n+2)!)-\ln(1+n!)}{\log_2 n}$ è uguale a:

A $\frac{2}{\ln 2}$ B $\frac{1}{\ln^2 2}$ C $\ln^2 2$ D $\frac{1}{2\ln 2}$ E $\frac{1}{2}\ln 2$ F $2\ln 2$

Quesito 4.

Il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+5}$ è uguale a:

A $\sqrt[3]{e^2}$ B e^7 C $\sqrt[3]{e^5}$ D e^5 E $\sqrt[3]{e^7}$ F e

Quesito 5.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{8^n+(-9)^n}$ è uguale a:

A 9 B -1 C 8 D -9 E non esiste F 17

Quesito 6.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{47n+1}{23n+58}-\sin n^2\right)^n$ è uguale a:

A 1 B $\sqrt[23]{e}$ C $+\infty$ D $\frac{47}{23}$ E non esiste F 0

Quesito 7.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\left(3+\frac{1}{n}\right)^n-3^n\right)$ è uguale a:

A $\sqrt[3]{e}-1$ B $+\infty$ C 0 D 1 E 3 F $3\left(\sqrt[3]{e}-1\right)$

Quesito 8.

Date le successioni (a_n), (b_n) e (c_n) definite da $a_n=3^{2n+1}$, $b_n=6^{n+3}$ e $c_n=9^{n-1}$, si ha:

A a_n e c_n hanno lo stesso ordine e $b_n=o(a_n)$ B a_n e b_n hanno lo stesso ordine e $b_n=o(c_n)$ C b_n e c_n hanno lo stesso ordine e $b_n=o(a_n)$ D a_n, b_n e c_n hanno tutte lo stesso ordine E $a_n=o(b_n)$ e $b_n=o(c_n)$ F $c_n=o(b_n)$ e $b_n=o(a_n)$

Quesito 9.

Date le successioni (a_n), (b_n) e (c_n) definite da $a_n=2^n$, $b_n=2^n n^{10}$ e $c_n=\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$, si ha:

A a_n e c_n hanno lo stesso ordine e $a_n=o(b_n)$ B $a_n=o(c_n)$ e $c_n=o(b_n)$ C a_n, b_n e c_n hanno tutte lo stesso ordine D b_n e c_n hanno lo stesso ordine e $a_n=o(b_n)$ E a_n e b_n hanno lo stesso ordine e $b_n=o(c_n)$ F $a_n=o(b_n)$ e $b_n=o(c_n)$

Quesito 10.

Sia dato l'insieme $A=\left\{2^{(-n)^n} \;\middle|\; n\in\mathbf{N}-\{0\}\right\}$. Si considerino le affermazioni:
(a) A ha massimo;
(b) A ha minimo;
(c) A è superiormente limitato;
(d) A è inferiormente limitato.
Allora quelle vere sono:

A tutte B **(a)**, **(c)**, **(d)** ma non **(b)** C solo **(c)** e **(d)** D nessuna E solo **(d)** F **(b)**, **(c)**, **(d)** ma non **(a)**

Quesito 11.

Siano $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$ e $b_n=\frac{1}{n\ln(n+1)}$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?
(a) frequentemente in n si ha $a_n<b_n$;
(b) definitivamente in n si ha $a_n<b_n$;
(c) frequentemente in n si ha $a_n>b_n$.

A tutte B solo **(a)** e **(b)** C solo **(a)** e **(c)** D solo **(c)** E solo **(a)** F nessuna

Quesito 12.

Dire che
" per ogni $\epsilon>0$, definitivamente in n, si ha $|a_n|>\epsilon$ "
equivale ad affermare che:

A $a_n\to+\infty$ B a_n non ha sottosuccessioni infinitesime C $|a_n|\to+\infty$ D a_n non ha limite finito E a_n non è infinitesima F a_n non è limitata

3. II parte: problemi da svolgere

Problema 1.

Determinate, motivando la risposta, tutti i punti interni, i punti esterni e i punti di frontiera dell'insieme

$$A=(\mathbf{Q}\cap[0,1])\cup(1,2)\cup\{3\}.$$

Problema 2.

Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)^n+2^{n+2}+5n^2}{n!+n^n+100^{2n}}$$

Problema 3.

Mettere le seguenti successioni in ordine di infinito crescente:

$$a_n=n^2 2^{n^2} \qquad b_n=2^{(n+1)^2} \qquad c_n=\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$$

Problema 4.

Dopo aver definito cosa significa che due successioni sono asintoticamente equivalenti, dire se è sempre vero che a_n e a_{n+1} sono asintoticamente equivalenti, comunque venga scelta la successione a_n.
Motivare la risposta.

4. Svolgimenti e note sulla I parte

Per ciascun quesito ho riportato sia lo svolgimento che la distribuzione delle risposte date dai miei studenti. In alcuni casi (quesiti 2, 7, 8 e 9) ho anche aggiunto alcune considerazioni sugli errori fatti.
Per quanto riguarda i punteggi, la regola che ho utilizzato è la seguente: 1.5 punti per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta sbagliata e -0.3 per ogni risposta sbagliata.

Quesito 1.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^{n+2}+2(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}}$ è uguale a:

A $+\infty$ B 0 C 2 D 3 E 5 F $\dfrac{3}{e}+2e$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	34
	B	5
	C	0
	D	4
	E	2
	F	1
	Non data	17

Soluzione del Quesito 1.

La risposta esatta è: $+\infty$.
Infatti:

$$\frac{3n^{n+2}+2(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}} > \frac{3n^{n+2}}{(n+1)^{n+1}} = 3n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = 3n\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to 3\cdot(+\infty)\cdot\frac{1}{e} = +\infty.$$

Quindi la successione assegnata tende a $+\infty$ grazie al teorema del confronto.

Quesito 2.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+6n}-n}{\sqrt{n^4+3n^2}-n^2}$ è uguale a:

A 2 B 0 C 1 D $+\infty$ E $\dfrac{1}{3}$ F 6

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	4
	B	43
	C	3
	D	1
	E	0
	F	1
	Non data	11

Soluzione del Quesito 2.

La risposta esatta è: 2.
Infatti la successione di cui cerchiamo il limite può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n^2+6n}-n}{\sqrt{n^4+3n^2}-n^2} &= \frac{\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+6n}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+3n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{n^4+3n^2}-n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+6n}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+3n^2}+n^2\right)} =\\ &= \frac{\left(n^2+6n-n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+3n^2}+n^2\right)}{\left(n^4+3n^2-n^4\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+6n}+n\right)} =\\ &= \frac{6n\cdot n^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1\right)}{3n^2\cdot n\left(\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1\right)} =\\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}.\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+6n}-n}{\sqrt{n^4+3n^2}-n^2} = \lim_{n\to+\infty} 2\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1} = 2\cdot\frac{\sqrt{1+0}+1}{\sqrt{1+0}+1} = 2.$$

Nota sul Quesito 2.

Immagino che i 43 studenti che hanno segnato la risposta B ritenessero (erroneamente) che il denominatore fosse un infinito di ordine più alto del numeratore, visto che vi compaiono potenze di grado più alto.

Ciò è errato, anzi non si tratta nemmeno di una forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Sono invece numeratore e denominatore ad essere essi stessi forme indeterminate della forma $\infty-\infty$ che, opportunamente manipolate (vedi svolgimento) risultano tendere entrambe a limiti finiti e non nulli.

Quesito 3.

Il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+(n+2)!)-\ln(1+n!)}{\log_2 n}$ è uguale a:

A $2\ln 2$ B $\dfrac{1}{2\ln 2}$ C $\dfrac{2}{\ln 2}$ D $\dfrac{1}{2}\ln 2$ E $\ln^2 2$ F $\dfrac{1}{\ln^2 2}$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	6
	B	1
	C	2
	D	2
	E	3
	F	2
	Non data	47

Soluzione del Quesito 3.

La risposta esatta è: $2\ln 2$.

Osserviamo che

$$\ln(1+n!) = \ln\left(n!\left(\frac{1}{n!}+1\right)\right) = \ln(n!) + \ln\left(\frac{1}{n!}+1\right) = \ln(n!) + o(1),$$

dove $o(1)$ sta ad indicate un termine che tende a zero.

Analogamente si ha

$$\ln(1+(n+2)!) = \ln((n+2)!) + o(1).$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\ln(1+(n+2)!) - \ln(1+n!) &= \ln((n+2)!) + o(1) - \ln(n!) - o(1) =\\ &= \ln\frac{(n+2)!}{n!} + o(1) = \ln(n+2)(n+1) + o(1) =\\ &= \ln\left(n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + o(1) =\\ &= \ln n^2 + \ln\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + o(1) =\\ &= 2\ln n + o(1).\end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+(n+2)!)-\ln(1+n!)}{\log_2 n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln n + o(1)}{\log_2 n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\ln n}{\frac{\ln n}{\ln 2}} = 2\ln 2,$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo utilizzato la formula per il cambio di base dei logaritmi.

Quesito 4.

Il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+5}$ è uguale a:

A $\sqrt[3]{e^2}$ B $\sqrt[3]{e^5}$ C $\sqrt[3]{e^7}$ D e^5 E e^7 F e

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	43
	B	1
	C	2
	D	7
	E	0
	F	7
	Non data	3

Soluzione del Quesito 4.

La risposta esatta è: $\sqrt[3]{e^2}$.
Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+5}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\cdot\frac{2n+5}{3n}}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{2n+5}{3n}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2},$$

dove nel passaggio al limite si è utilizzato il fatto che

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\to e \qquad \text{e} \qquad \frac{2n+5}{3n}\to\frac{2}{3}.$$

Quesito 5.

Il $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{8^n+(-9)^n}$ è uguale a:

A non esiste B 8 C 9 D -9 E 17 F -1

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	34
	B	6
	C	1
	D	4
	E	0
	F	12
	Non data	6

Soluzione del Quesito 5.

La risposta esatta è: non esiste.
Infatti, per n pari si ha:

$$a_n=\sqrt[n]{8^n+(-9)^n}=\sqrt[n]{8^n+9^n}=9\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{8}{9}\right)^n+1}=9\cdot\left(1+\left(\frac{8}{9}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\to 9\cdot(1+0)^0=9,$$

mentre per n dispari si ha:

$$a_n=\sqrt[n]{8^n+(-9)^n}=\sqrt[n]{8^n-9^n}=-9\cdot\sqrt[n]{-\left(\frac{8}{9}\right)^n+1}=-9\cdot\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\to -9\cdot(1-0)^0=-9.$$

Quindi a_n non ha limite, né finito né infinito, perché ha due sottosuccessioni che tendono a limiti diversi.

Quesito 6.

Il $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{47n+1}{23n+58}-\sin n^2\right)^n$ è uguale a:

A $+\infty$ B non esiste C $\frac{47}{23}$ D 0 E 1 F $\sqrt[23]{e}$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	26
	B	15
	C	10
	D	0
	E	2
	F	2
	Non data	8

Soluzione del Quesito 6.

La risposta esatta è: $+\infty$.
Infatti, per ogni $n\in\mathbf{N}$ si ha:

$$\frac{47n+1}{23n+58}-\sin n^2\geq\frac{47n+1}{23n+58}-1=\frac{47n+1-23n-58}{23n+58}=\frac{24n-57}{23n+58}.$$

Di conseguenza, poichè

$$\frac{24n-57}{23n+58}\to\frac{24}{23}>1,$$

definitivamente in n si avrà:

$$\frac{47n+1}{23n+58}-\sin n^2\geq\frac{24n-57}{23n+58}>1,$$

e quindi anche:

$$\left(\frac{47n+1}{23n+58}-\sin n^2\right)^n\geq\left(\frac{24n-57}{23n+58}\right)^n.$$

Ma

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{24n-57}{23n+58}\right)^n=\left(\frac{24}{23}\right)^{+\infty}=+\infty$$

e quindi, grazie al teorema del confronto, si avrà anche

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{47n+1}{23n+58}-\sin n^2\right)^n=+\infty.$$

Quesito 7.

Il $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(3+\frac{1}{n}\right)^n-3^n\right)$ è uguale a:

A $+\infty$ B 0 C 3 D 1 E $\sqrt[3]{e}-1$ F $3\left(\sqrt[3]{e}-1\right)$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	15
	B	24
	C	1
	D	2
	E	5
	F	9
	Non data	7

Soluzione del Quesito 7.

La risposta esatta è: $+\infty$.
Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(3+\frac{1}{n}\right)^n-3^n\right)=\lim_{n\to+\infty}3^n\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n-1\right)=+\infty\cdot\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)=+\infty,$$

dove, nel penultimo passaggio, abbiamo utilizzato con $\alpha = \dfrac{1}{3}$ il limite notevole:

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^{\alpha}.$$

Nota sul Quesito 7.

I 24 studenti che hanno segnato la risposta $\boxed{B}$ hanno probabilmente fatto il seguente errore: hanno pensato che scrivere $\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^n$ e scrivere 3^n fosse la stessa cosa perché $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Il docente li invita a riflettere sul fatto che, se fosse corretto operare in tale modo, allora scrivere $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ e scrivere 1^n dovrebbe essere la stessa cosa e quindi si otterrebbe che $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to 1$, che è ovviamente falso.

Quesito 8.

Date le successioni (a_n), (b_n) e (c_n) definite da $a_n = 3^{2n+1}$, $b_n = 6^{n+3}$ e $c_n = 9^{n-1}$, si ha:
$\boxed{A}$ a_n e c_n hanno lo stesso ordine e $b_n = o(a_n)$ $\boxed{B}$ $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n)$ $\boxed{C}$ b_n e c_n hanno lo stesso ordine e $b_n = o(a_n)$ $\boxed{D}$ $c_n = o(b_n)$ e $b_n = o(a_n)$ $\boxed{E}$ a_n e b_n hanno lo stesso ordine e $b_n = o(c_n)$ $\boxed{F}$ a_n, b_n e c_n hanno tutte lo stesso ordine

---

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	20
	B	1
	C	14
	D	4
	E	4
	F	16
	Non data	4

Soluzione del Quesito 8.

La risposta esatta è: a_n e c_n hanno lo stesso ordine e $b_n = o(a_n)$.

Per cominciare osserviamo che:

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n \\ b_n &= 6^{n+3} = 216 \cdot 6^n \\ c_n &= 9^{n-1} = \frac{1}{9} \cdot 9^n. \end{aligned}$$

Quindi a_n e c_n hanno lo stesso ordine visto che il loro rapporto è costante e quindi, a maggior ragione, tende ad una costante.

Invece $b_n = o(a_n)$ perché

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{216 \cdot 6^n}{3 \cdot 9^n} = 72 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 72 \cdot 0 = 0.$$

Nota sul Quesito 8.

I 14 studenti che hanno segnato la risposta $\boxed{C}$ hanno erroneamente guardato solo gli esponenti, senza curarsi della base, mentre i 16 che hanno risposto $\boxed{F}$ hanno erroneamente pensato che tutte le funzioni esponenziali abbiano lo stesso ordine di infinito.

Si tratta di errori grossolani che gli studenti devono correggere in fretta.

Quesito 9.

Date le successioni (a_n), (b_n) e (c_n) definite da $a_n = 2^n$, $b_n = 2^n n^{10}$ e $c_n = \left(2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$, si ha:
$\boxed{A}$ $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n)$ $\boxed{B}$ $a_n = o(c_n)$ e $c_n = o(b_n)$ $\boxed{C}$ b_n e c_n hanno lo stesso ordine e $a_n = o(b_n)$ $\boxed{D}$ a_n, b_n e c_n hanno tutte lo stesso ordine $\boxed{E}$ a_n e c_n hanno lo stesso ordine e $a_n = o(b_n)$ $\boxed{F}$ a_n e b_n hanno lo stesso ordine e $b_n = o(c_n)$

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	4
	B	7
	C	0
	D	3
	E	36
	F	6
	Non data	7

Soluzione del Quesito 9.

La risposta esatta è: $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n)$.

Per mostrare che $a_n = o(b_n)$ basta osservare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot n^{10}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Mostrare che $b_n = o(c_n)$ è un po' più laborioso.

Per cominciare osserviamo che, per ogni $n \geq 1$, si ha:

$$(1) \quad c_n = \left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = 2^n \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^n = 2^n \cdot \left(\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \geq 2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{n}},$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \to \sqrt{e}$ crescendo e che il suo valore per $n = 1$ è proprio $\frac{3}{2}$.

Da (1) segue che:

$$(2) \quad \frac{c_n}{b_n} = \frac{\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{2^n \cdot n^{10}} \geq \frac{2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{n}}}{2^n \cdot n^{10}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{n}}}{\left(\sqrt{n}\right)^{20}} \to +\infty,$$

dove, il passaggio al limite si giustifica col fatto (noto) che, per $x \to +\infty$, $x^{\beta} = o(\alpha^x)$, per ogni $\beta \in \mathbf{R}$ e per ogni $\alpha > 1$.

Quindi da (2) segue che $\dfrac{b_n}{c_n} \to 0$, cioè che $b_n = o(c_n)$.

Nota sul Quesito 9.

I 36 studenti che hanno segnato la risposta $\boxed{E}$ hanno erroneamente ritenuto che 2^n e $\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ fossero asintoticamente equivalenti, grazie al fatto che $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

Si tratta dello stesso tipo di errore che ha fatto chi ha segnato $\boxed{B}$ nel quesito 7.

Si veda a tale scopo anche la nota relativa a tale quesito.

`Quesito 10.`

Sia dato l'insieme $A = \left\{ 2^{(-n)^n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$. Si considerino le affermazioni:
(a) A ha massimo;
(b) A ha minimo;
(c) A è superiormente limitato;
(d) A è inferiormente limitato.
Allora quelle vere sono:

[A] solo **(d)** [B] **(a)**, **(c)**, **(d)** ma non **(b)** [C] **(b)**, **(c)**, **(d)** ma non **(a)** [D] solo **(c)** e **(d)** [E] tutte [F] nessuna

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	22
	B	8
	C	8
	D	5
	E	0
	F	13
	Non data	7

`Soluzione del Quesito 10.`

La risposta esatta è: solo **(d)**.
Infatti, posto $a_n = 2^{(-n)^n}$, si ha:

$$a_n = \begin{cases} 2^{n^n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{1}{2^{n^n}} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La successione a_n si può quindi suddividere in due sottosuccessioni

$$b_k = 2^{(2k)^{2k}} \qquad \text{e} \qquad c_k = \frac{1}{2^{(2k+1)^{2k+1}}}$$

entrambe strettamente positive ma tali che, per $k \to +\infty$, $b_k \to +\infty$ e $c_k \to 0$
Ciò dimostra che l'insieme A, che è costituito da punti che sono tutti strettamente positivi, contiene sia punti arbitrariamente grandi sia punti arbitrariamente vicini a 0.
Di conseguenza A non ha né massimo né minimo, non è superiormente limitato ma è inferiormente limitato.
Ciò significa che **(a)**, **(b)** e **(c)** sono false mentre **(d)** è vera.

`Quesito 11.`

Siano $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$ e $b_n = \dfrac{1}{n \ln(n+1)}$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?
(a) frequentemente in n si ha $a_n < b_n$;
(b) definitivamente in n si ha $a_n < b_n$;
(c) frequentemente in n si ha $a_n > b_n$.

[A] solo **(a)** e **(c)** [B] solo **(a)** [C] solo **(a)** e **(b)** [D] solo **(c)** [E] nessuna [F] tutte

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	21
	B	5
	C	6
	D	10
	E	7
	F	0
	Non data	14

`Soluzione del Quesito 11.`

La risposta esatta è: solo **(a)** e **(c)**.
Infatti, per n pari e maggiore di 1 si ha

$$a_n = \frac{2}{n} > \frac{1}{n \ln(1+n)} = b_n,$$

mentre per n dispari si ha:

$$a_n = \frac{1-1}{n} = 0 < \frac{1}{n \ln(1+n)} = b_n.$$

Quindi sono vere frequentemente in n sia $a_n > b_n$ sia $a_n < b_n$.
Di conseguenza **(a)** e **(c)** sono vere.
Ovviamente, **(b)** è falsa perché non può essere definitivamente vera $a_n < b_n$ se già sappiamo che frequentemente vale $a_n > b_n$.

`Quesito 12.`

Dire che
" per ogni $\epsilon > 0$, definitivamente in n, si ha $|a_n| > \epsilon$ "
equivale ad affermare che:

[A] $|a_n| \to +\infty$ [B] a_n non è infinitesima [C] $a_n \to +\infty$ [D] a_n non è limitata [E] a_n non ha limite finito [F] a_n non ha sottosuccessioni infinitesime

Distribuzione delle risposte

(Giusta)	A	20
	B	4
	C	7
	D	6
	E	6
	F	2
	Non data	18

`Soluzione del Quesito 12.`

La risposta esatta è: $|a_n| \to +\infty$.
Infatti, dire che una successione c_n tende a $+\infty$ significa dire che:

(3) *"per ogni $M > 0$ definitivamente in n si ha $c_n > M$."*

Se nella (3) chiamiamo la costante ϵ anziché M e la successione c_n è uguale a $|a_n|$, si ottiene proprio l'affermazione del quesito.
Quindi tale affermazione equivale a dire che $|a_n| \to +\infty$.

5. Svolgimenti e note sulla II parte

Qui di seguito ho riportato svolgimenti e criteri di valutazione per ciascuno dei problemi della seconda parte.
Ovviamente, mentre è abbastanza facile stabilire cosa significa che uno svolgimento è tutto giusto o tutto sbagliato, non è altrettanto facile stabilire il valore di problema svolto parzialmente o con solo qualche errore.
Le griglie di valutazione che ho riportato sono quindi quelle che *io* ho ritenuto corrette, ed è possibile che, per un altro docente, la classificazione degli errori e i punteggi parziali possano essere un po' diversi.
Ritengo comunque che i punteggi che ho fissato siano abbastanza equilibrati e che quindi, gli studenti che intendono autovalutarsi, possano comunque utilizzarli per ottenere almeno un voto indicativo.

`Soluzione del Problema 1.`

L'insieme

$$A = (\mathbf{Q} \cap [0,1]) \cup (1,2) \cup \{3\}$$

è rappresentato nella figura seguente

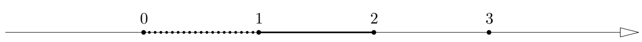

figura 1

dove il tratteggio tra 0 e 1 sta ad indicare che non è stato preso tutto l'intervallo $[0,1]$ ma solo i numeri razionali in esso contenuti. Poichè sia A che il suo complementare sono densi nell'intervallo $[0,1]$, avremo che tutti i punti di tale intervallo sono di frontiera per A, visto che ogni loro intorno interseca sia A che il suo complementare A^c. Infine gli altri punti di frontiera per A sono, banalmente 2 e 3.
Possiamo quindi concludere che la frontiera di A è l'insieme

$$\partial A = [0,1] \cup \{2\} \cup \{3\},$$

che è rappresentato nella figura seguente:

figura 2

A questo punto, tutti i punti di A che non sono di frontiera sono necessariamente punti interni, quindi l'insieme di tutti i punti interni di A è costituito dall'intervallo aperto $(1, 2)$.
Infine, poiché ciascun punto di $\mathbf{R}$ è sempre o interno o esterno o di frontiera per A, l'insieme di tutti i punti esterni è costituito da tutti i punti rimanenti, cioè dall'insieme $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Nota sul Problema 1.

Per la valutazione di questo problema, apparentemente così innocuo, ho avuto invece serie difficoltà.
Infatti, a parte l'ovvia attribuzione del punteggio pieno agli svolgimenti corretti e completi di tutte le motivazioni, non sono riuscito a classificare in modo completo gli svolgimenti parzialmente sbagliati, a causa della grande varietà di errori che gli studenti sono riusciti ad inventare.
Gli unici punti fermi che sono riuscito a fissare sono i seguenti:

- **4 punti** `A.` Problema svolto in modo corretto e completo.
- **2 punti** `B.` Punti interni, esterni e di frontiera identificati correttamente ma con giustificazioni assenti o comunque molto lacunose.
- **1.5 punti** `C.` Problema svolto correttamente ma restringendosi ai soli punti dell'insieme, ovvero di ciascun punto dell'insieme A lo studente ha detto se è interno o di frontiera, giustificandolo.
- **1 punto** `D.` Come per il caso `C`, ma senza alcuna giustificazione.
- **0 punti** `E.` Non svolto o con errori gravi e grossolani.

Ovviamente questo elenco non esauriva tutti i casi. Per tutti gli elaborati che non ci rientravano ho deciso il voto di volta in volta, paragonando la gravità dell'errore che vi compariva con quelli elencati nella lista sopra.

Soluzione del Problema 2.

Il limite proposto vale $2e$.
Infatti, per cominciare osserviamo che dalla teoria è già noto che sia $n!$ sia 100^{2n} (cioè 10000^n) sono $o(n^n)$.
Analogamente, anche $5n^2$ e 2^{n+2} (cioè $4 \cdot 2^n$) sono $o(n^n)$ e quindi, a maggior ragione anche $o((n+1)^n)$, visto che $n^n \leq (n+1)^n$.
Di conseguenza si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)^n + 2^{n+2} + 5n^2}{n! + n^n + 100^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)^n + o((n+1)^n) + o((n+1)^n)}{o(n^n) + n^n + o(n^n)} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2e.$$

Nota sul Problema 2.

I criteri utilizzati per la valutazione sono stati i seguenti:

- **4 punti** `A.` Problema svolto in modo corretto e completo.
- **3 punti** `B.` Svolgimento contenente un errore non grave, che non altera la difficoltà dell'esercizio.
- **2 punti** `C.` Lo studente identifica correttamente i termini dominanti di numeratore e denominatore ma poi sbaglia nel calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2(n+1)^n}{n^n}$.
- **1 punto** `D.` Lo studente sbaglia nel determinare le parte principale del numeratore o del denominatore, ma non di entrambi.
- **0 punti** `E.` Non svolto o con più di un errore grave.

Dei 61 compiti corretti solo 15 rientravano nel caso `A` mentre ben 29 rientravano nel caso `C`.
Può essere utile per gli studenti vedere che tipo di errori sono stati commessi dai 29 che rientravano nel caso `C`.
In ben 18 compiti l'errore commesso è stato quello di affermare (in varie forme) che n^n ed $(n+1)^n$ sono asintoticamente equivalenti perché 1 è trascurabile rispetto ad n.
In altri 7 casi invece l'errore è stato di scrivere

$$\frac{2(n+1)^n}{n^n} \overset{\text{(errato)}}{=} \frac{(2n+2)^n}{n^n} \to +\infty$$

Infine in 4 casi si affermava che $(n+1)^n$ è un infinito di ordine superiore ad n^n perché la base è più grande.

Soluzione del Problema 3.

La risposta corretta è $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n)$.
Per mostrare che $a_n = o(b_n)$ basta osservare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 2^{n^2}}{2^{n^2} \cdot 2^{2n} \cdot 2^1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2 \cdot 4^n} = 0$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che le potenze di n sono infiniti di ordine inferiore agli esponenziali.
Invece, per mostrare che $b_n = o(c_n)$ basta osservare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{n^2}}{2^{n^2} \cdot 2^{2n} \cdot 2^1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{n^2}}{2 \cdot 4^n} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \left(\frac{\left(\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{2}}}{4}\right)^n = \left(\frac{e^{+\infty}}{4}\right)^{+\infty} = +\infty,$$

dove nel passaggio al limite abbiamo utilizzato il fatto che

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$$

se $a_n \to +\infty$.

Nota sul Problema 3.

I criteri utilizzati per la valutazione sono stati i seguenti:

- **5 punti** `A.` Problema svolto in modo corretto e completo.
- **4 punti** `B.` Verifica corretta solo del fatto che $a_n = o(b_n)$ e $a_n = o(c_n)$.
- **3 punti** `C.` Verifica corretta solo del fatto che $b_n = o(c_n)$.
- **2 punti** `D.` Verifica corretta solo del fatto che $a_n = o(b_n)$.
- **0 punti** `E.` Non svolto o con errori gravi e grossolani.

La maggior parte degli elaborati rientrava nel caso `D`. Infatti molti studenti, pur confrontando in modo corretto a_n e b_n, hanno ritenuto che a_n e c_n fossero dello stesso ordine, perché hanno pensato che $\frac{1}{\sqrt{n}}$, visto che è infinitesimo, si potesse omettere.
Si tratta dello stesso tipo di errore evidenziato nei quesiti 7 e 9 della parte a risposta multipla.

Soluzione del Problema 4.

Date due successioni (a_n) e (b_n), tendenti entrambe a 0 o entrambe a $+\infty$, dire che esse sono asintoticamente equivalenti significa dire che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Si noti che a_n e a_{n+1} non sono necessariamente asintoticamente equivalenti.
Possiamo prendere $a_n = n!$ come controesempio.
Infatti si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.$$

Nota sul Problema 4.

I criteri utilizzati per la valutazione sono stati i seguenti:

- **5 punti** `A.` Problema svolto in modo corretto e completo.
- **3 punti** `B.` Definizione corretta + affermazione che a_n ed a_{n+1} non sono sempre asintoticamente equivalenti, con un barlume di dimostrazione corretta.
- **2 punti** `C.` Definizione corretta, ma la questione dell'asintotica equivalenza tra a_n e a_{n+1} non viene affrontata o, se affrontata, viene svolta in modo errato.
- **0 punti** `D.` Non svolto o con errori gravi e grossolani.

Il punteggio massimo è stato ottenuto da 12 studenti. Nella maggior parte dei casi la successione scelta come controesempio $a_n = n!$. Ho comunque apprezzato particolarmente un elaborato che, anziché prendere come controesempio una successione che andasse velocemente a $+\infty$, ha scelto $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, in modo tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ era negativo, quindi non poteva tendere a 1.
Il caso `C` è stato quello in cui sono rientrati la maggior parte degli elaborati: ben 36 su 61.